

---

## **Producto 5.**

# **Tablas de vida que proyectan la evolución futura en la mortalidad para personas nacidas entre 1900 y 2035**

---

**Centro Centroamericano de Población CCP  
de la  
Universidad de Costa Rica**

**San José, Costa Rica  
Julio de 2012**

### **Reconocimientos**

Este producto fue preparado principalmente por Luis Rosero Bixby, Catedrático de la Universidad de Costa Rica. El estudio se efectuó en el Centro Centroamericano de Población (CCP) de la Universidad de Costa Rica contratado por la Superintendencia de Pensiones (SUPEN). El Instituto de Investigaciones en Salud (INISA) y la Escuela de Estadística, ambos de la Universidad de Costa Rica, aportaron parte del tiempo del investigador. La estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter y la proyección estocástica la efectuó el estudiante de post grado Eduardo Aguilar Fernández con un software desarrollado por él como parte de su tesis de Maestría en Estadística de la UCR.

## Introducción

Las tablas de vida estimadas para el periodo 2005-2010 son tablas por contemporáneos, es decir una descripción, para las distintas edades, de las esperanzas de vida y probabilidades de muerte, que corresponden al patrón de mortalidad del quinquenio 2005-2010. Las tablas por contemporáneos describen la mortalidad en las distintas edades de una cohorte hipotética, a diferencia de las tablas por generaciones que describen la mortalidad en una cohorte real. Por ejemplo, cuando con base en las tablas por contemporáneos se dice que una mujer pensionada a la edad 60 en 2012 tiene una esperanza de vida de 24,9 años, se está indicando lo que se espera viva en promedio esta mujer de acuerdo con las condiciones de mortalidad de 2005-2010. En la realidad, empero, esta mujer vivirá bajo condiciones distintas a las de ese periodo: lo hará bajo las condiciones de la cohorte real de mujeres nacidas en 1952 y a partir de la edad 60 estará sujeta a patrones de mortalidad que ocurrirán en Costa Rica con posterioridad al 2012, es decir con la mortalidad de 2022 a los 70 años, de 2032 a los 80 años y así sucesivamente. En este caso real, serían aplicables los patrones de 2005-2010 solo si uno asume que la mortalidad no cambiará en el futuro.

Los actuarios conocen bien este problema y promueven el uso de tablas de mortalidad que incorporen las condiciones esperadas en el futuro. Como es de esperarse que en el futuro la mortalidad disminuya, si uno utilizara la tabla de 2005-2010 para el cálculo de rentas vitalicias y retiros programados, las compañías aseguradoras podrían tener dificultades para cumplir con los términos del contrato y los pensionados quedarían desprotegidos, ya que en promedio vivirán más tiempo que el estimado por la tabla por contemporáneos 2005-2010. Deben, por tanto, estimarse tablas que incorporen las mejoras esperadas en la mortalidad. Para cálculos actuariales de personas en edad de jubilarse la proyección de la mortalidad debería tener un horizonte de unos 50 años, es decir hasta que se extingan las cohortes con alrededor de 60 años en la actualidad. Sin embargo el sistema de pensiones complementarias requerirá también hacer de vez en cuando cálculos actuariales para personas jóvenes, herederas de una pensión. Para cubrir toda la vida de estas generaciones de jóvenes o, incluso, de recién nacidos se requieren proyecciones de mortalidad con horizontes de más de 100 años.

El presente documento atiende estas demandas actuariales y propone tablas de vida que incorporan las mejoras en la mortalidad que probablemente ocurrirán en Costa Rica en el futuro hasta el año 2150, es decir hasta que se extinga una generación de nacidos en 2035 (bajo el supuesto que se ha venido utilizando de que la longevidad máxima es de 115 años). La propuesta consiste en proyecciones estocásticas de la mortalidad preparadas con el método de Lee-Carter.

En dos estudios previos preparados para SUPEN se había utilizado las proyecciones oficiales de mortalidad efectuadas como parte de las proyecciones oficiales de población (INEC & CCP, 2002). En el presente estudio se decidió abandonar las proyecciones oficiales de mortalidad en razón de que: (1) han quedado obsoletas, tanto que las nuevas proyecciones de Naciones Unidas para 2010 las modificaron substancialmente (United

Nations, 2011); y (2) no tienen el horizonte de muy largo plazo requerido (llegan hasta 2100 y se requiere proyecciones hasta 2150).

En el estudio para SUPEN de 2006, además de proyectar la mortalidad se hizo un intento para facilitar el uso de tablas de mortalidad por generaciones con lo que se denominó “tablas de vida dinámicas”, las cuales con una simple fórmula matemática estimaban la probabilidad de muerte en ciertas edades y años del futuro. Esta fórmula era una adaptación de la usada por la *Facultad y el Instituto de Actuarios de Inglaterra* (2002), pero estaba restringida a cierto rango de edades y de tiempo en el futuro. En el presente estudio se busca remover estas restricciones y ofrecer un sistema para determinar la mortalidad futura de cualquier cohorte con sobrevivientes en la actualidad o de nacidos en las proximas dos décadas, es decir la mortalidad de cohortes nacidas de 1900 a 2035 aproximadamente. Ello requiere proyectar la mortalidad hasta el año 2150, como ya se ha indicado. Para que la proyección además ofrezca estimaciones de intervalos de confianza, o error probable, se decidió usar el método de proyección estocástica de Lee-Carter. Este método de proyección de la mortalidad es cada vez más utilizado por demógrafos y actuarios del mundo. Por ejemplo, lo usan La oficina del censo de los EEUU, la Sociedad de Actuarios de ese país y la Oficina del Actuario Jefe de la Seguridad Social. En un libro reciente sobre predicciones demográficas se sostiene que Lee-Carter es “el mejor y más ampliamente usado método de proyección de la mortalidad en la literatura” (Giroso & King 2008).

### **El método de Lee-Carter y los datos**

Como línea de base de la proyección se usa la serie de tablas completas de mortalidad re-estimadas para los quinquenios de 1950 al 2010, es decir doce tablas para cada sexo, con información de mortalidad/sobrevivencia para 115 edades. Estas son tablas armonizadas en procedimientos y supuestos, de manera que son coherentes entre sí. Las tablas están disponibles en: <http://ccp.ucr.ac.cr/observa/CRindicadores/TVcompletas.html>.

El modelo de mortalidad Lee-Carter consiste en una aparentemente sencilla relación lineal en los logaritmos de la tasa de mortalidad  $m_{xt}$  en la edad  $x$  y el tiempo  $t$  (Lee & Carter, 1992):

$$\ln(m_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt}$$

En donde  $a$ ,  $b$  y  $k$  son vectores de parámetros a determinar. Hay tantos valores  $a$  y  $b$  como edades (115 en cada sexo) y tantos valores  $k$  como observaciones en el tiempo (12 quinquenios):

$a_x$  es el nivel medio del logaritmo de las tasas de mortalidad en cada edad  $x$ .

$b_x$  es la velocidad de cambio de la mortalidad en la edad  $x$ .

$k_t$  indica el nivel general de la mortalidad en el año  $t$ .

$\varepsilon_{xt}$  es el término de error que varía con la edad  $x$  y el tiempo  $t$ .

Para estimar los parámetros del modelo se han propuesto varios procedimientos. El usado en el presente estudio es el originalmente propuesto por Lee y Carter, consistente en la descomposición de valores singulares de la formulación matricial del modelo. Además, siguiendo la recomendación de Lee y Carter, se efectúa un ajuste de los valores estimados del vector  $k$ , de modo que el modelo reproduce el número de defunciones de cada tiempo  $t$ . La estimación se efectuó con un programa de cómputo desarrollado por Aguilar (2012).

Una vez determinados los parámetros del modelo Lee-Carter, la proyección de la mortalidad futura es un ejercicio de extrapolación del parámetro  $k$  para valores futuros de  $t$ . Siguiendo la recomendación de Lee y Carter (1992) los valores futuros de  $k$  se estimaron con un modelo de series de tiempo tipo ARIMA de caminata aleatoria con deriva, como lo explica Aguilar (2012). En la estimación se asumió un error aleatorio con distribución normal, el cual se determinó con simulaciones tipo Montecarlo (mil simulaciones para cada periodo).

Las tasa de mortalidad en cada edad se proyectó para cada año del periodo 2010-2150 con los valores futuros del vector  $k$  y la siguiente relación recomendada por Lee (2000):

$$\ln(m_{x,t+s}) = \ln(m_{x,t}) + b_x (k_{t+s} - k_t)$$

En donde el tiempo  $t$  es el último periodo con información disponible (en el presente caso 2005-2010, es decir el valor puntual 2008,0),  $s$  es el número de años a futuro (por ejemplo,  $s = 14,5$  para tener una tasa de mortalidad para el año 2022). El vector de valores  $b_x$  es el estimado con el modelo Lee-Carter y las tablas de mortalidad de 1950 a 2010. En esta reformulación del modelo Lee-Carter se usan los logaritmos de las tasas de mortalidad en el último periodo de observación en lugar del vector  $a_x$  del modelo original. Con ello se asegura que la proyección reproduzca la última mortalidad observada, en el presente caso: el periodo 2005-2010. Se requiere, por tanto, tres vectores de información para la proyección:

1. Los logaritmos de las tasas  $m_x$  en el último periodo observado (la tabla de 2005-10);
2. el vector  $b_x$  del modelo Lee-Carter que describe la tendencia histórica en cada edad;
3. el vector de los niveles futuros de la mortalidad  $k_{t+s}$

Con la serie de tasas de mortalidad por edad en periodos futuros se estimaron tablas de mortalidad siguiendo el mismo procedimiento que para la tabla de 2005-2010<sup>1</sup>. Para estimar el intervalo de confianza de las funciones de estas tablas se construyeron mil tablas para cada periodo, una para cada valor de  $k$  obtenido con simulación Montecarlo de una variable aleatoria normalmente distribuida con el error estándar antes estimado para  $k$ .

Para fines de los cálculos actuariales deben utilizarse los valores de las probabilidades de muerte  $q_x$  correspondientes a los  $m_x$  proyectados. Con propósitos informativos se estima,

<sup>1</sup> El factor de corrección “años vividos por los fallecieron” en la edad cero se estimó con la siguiente relación determinada con regresión y datos históricos de Costa Rica:

$$a_0 = .1615 + 1.816 m_0 - .034 v$$

En donde  $V$  es una variable indicatriz de sexo con 1 si es varón y 0 si es mujer.

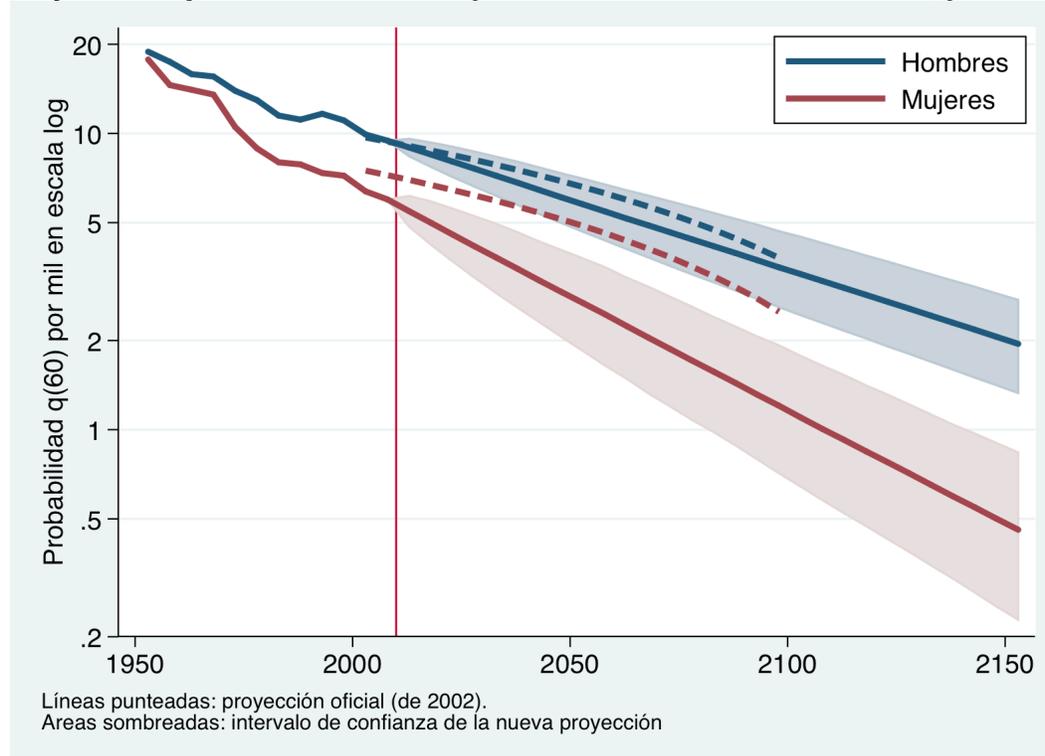
además, la tabla de mortalidad para cada generación o cohorte y se determina la esperanza de vida correspondiente.

## Resultados

En el anexo 1 se muestran los valores de los dos vectores del modelo Lee-Carter:  $b_x$  y  $k_t$  incluyendo la proyección estocástica de éste último hasta el año 2150 con los correspondientes errores estándar estimados. Estos vectores no son de mayor interés por sí mismos. En el presente estudio son un paso intermedio para proyectar la mortalidad.

En el gráfico 1 se ilustra el resultado de la proyección de una probabilidad de muerte arbitraria: la  $q_{60}$ , con su correspondiente intervalo de confianza. La probabilidad de morir de los hombres de 60 años de edad en la tabla de vida de 2005-2010 resultó de 9,5 por mil, la mitad que la estimada en la tabla de 1950-55. La proyección al 2150 es que caerá a 2,0 por mil con un intervalo de 95% de confianza de 1,4 a 2,8 por mil. En las mujeres la caída proyectada es relativamente más pronunciada: de 6,0 por mil en 2005-2010 a 0,5 por mil en 2100. Pero el intervalo de confianza es también relativamente más amplio, de 0,2 a 0,9 por mil.

Gráfico 1. Proyección al 2150 de la probabilidad de morir a la edad 60, por sexo

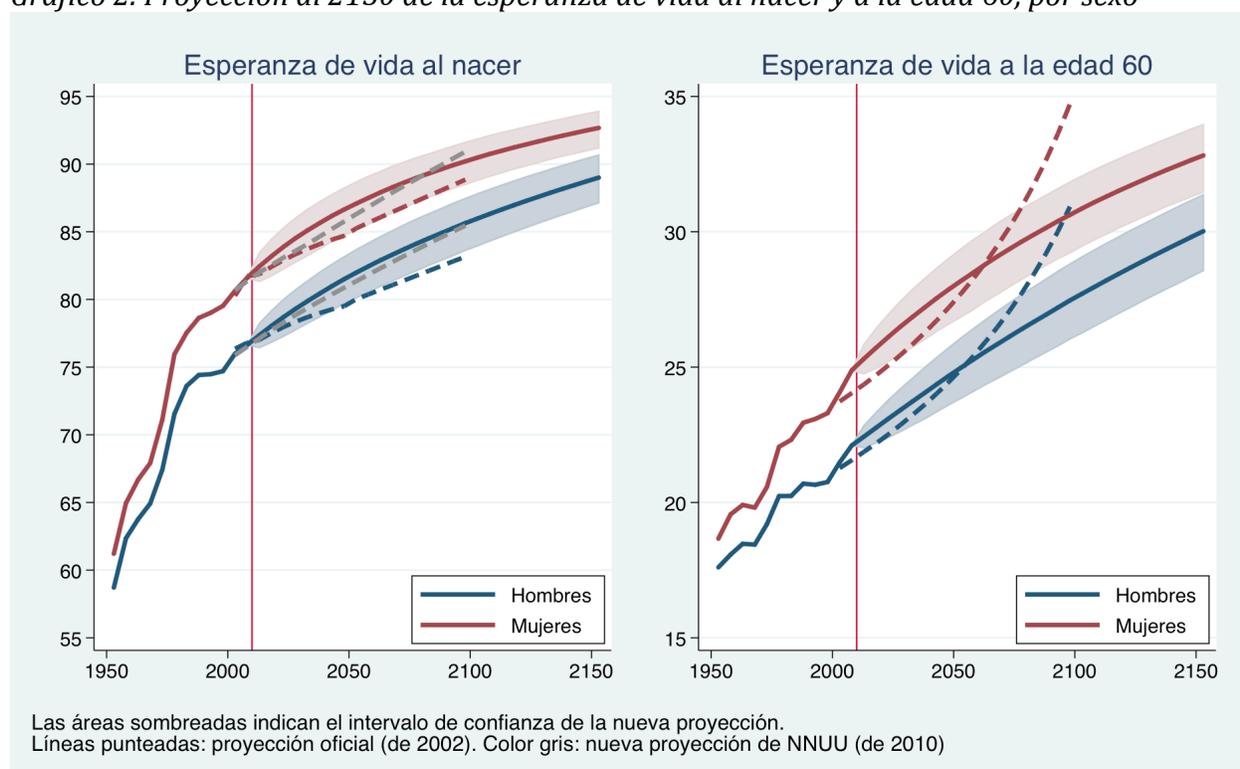


El gráfico también muestra los valores de la proyección oficial de 2002 (INEC & CCP, 2002), la cual llegaba únicamente hasta 2100. La nueva proyección de los hombres no es muy diferente y, de hecho, la curva de la proyección oficial de 2002 cae dentro del intervalo de confianza de la nueva proyección. En cambio, la nueva proyección de la mortalidad

femenina es significativamente más baja. Este resultado se origina sobre todo en los valores de partida. Las nuevas estimaciones de población con el censo de 2011 y de la mortalidad de las mujeres en estas edades en el 2005-2010 es de una mortalidad más baja que las estimaciones previas.

La esperanza de vida es un indicador resumen de las probabilidades de muerte. El gráfico 2 muestra su evolución desde 1950 y los resultados de la proyección a 2150. Se muestra la esperanza de vida al nacimiento y también la proyección de la esperanza de vida a una edad mas relevante para los sistemas de pensiones: la edad 60. El gráfico incluye también los intervalos de confianza estimados con la proyección estocástica y comparaciones con otras proyecciones.

Gráfico 2. Proyección al 2150 de la esperanza de vida al nacer y a la edad 60, por sexo



La proyección con el método Lee-Carter produce una tendencia razonable a la luz del pasado y con ganancias cada vez menores en el futuro. La proyección de la esperanza de vida al nacer para el año 2100 es de 85,6 para los hombres y 90,2 años para las mujeres con intervalos de confianza de cerca de dos años hacia arriba y hacia abajo. Esta proyección significa una ganancia de 8,9 y 8,6 años para hombres y mujeres respectivamente en los 90 años venideros, es decir una ganancia de casi un año por cada década, bastante menos que los entre 3 y 4 años de ganancia por década en el último medio siglo.

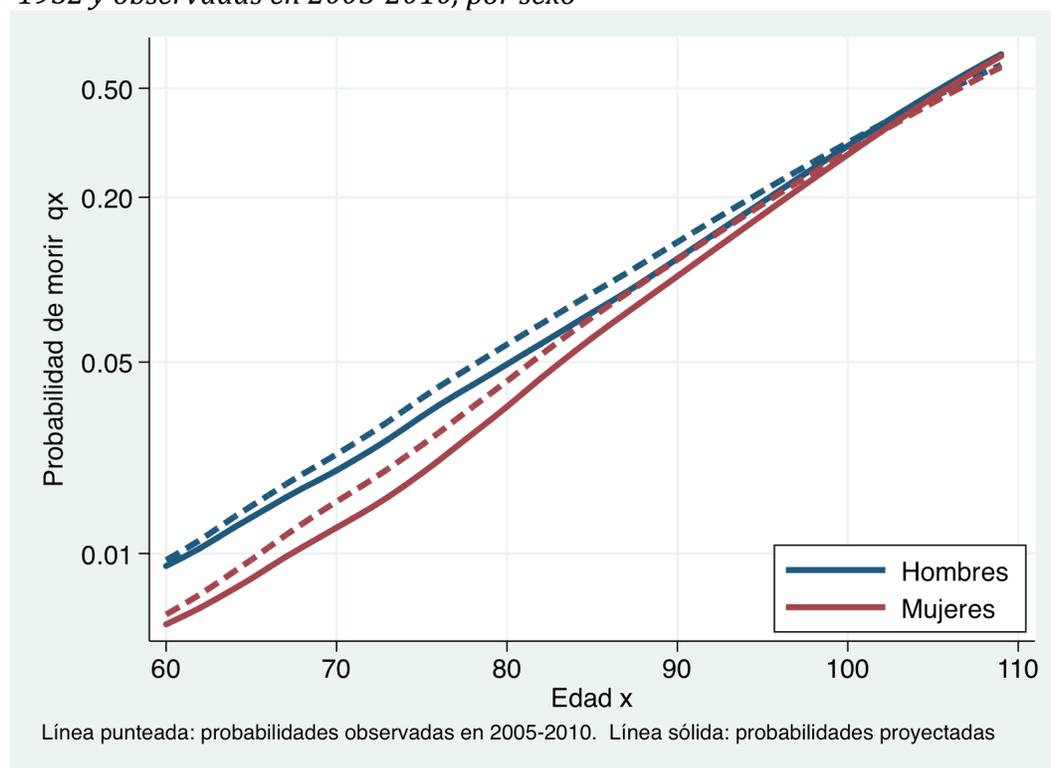
La nueva proyección con el método Lee-Carter resultó en una esperanza de vida al nacer mayor en 1,3 años en el 2100 que la proyección oficial usada previamente. Pero el

resultado para final de siglo es muy similar que el de la nueva proyección de la División de Población de las Naciones Unidas (United Nations, 2011), la cual, sin embargo, supuso un progreso lineal que es poco realista.

La esperanza de vida a la edad 60 muestra también una tendencia futura razonable. Hacia finales de siglo se proyecta que será de 27,5 y 30,6 años para hombres y mujeres, es decir de cinco a seis años mayor que la del último periodo observado. La tendencia proyectada con Lee-Carter parece ser más razonable que la de la proyección oficial que suponía ganancias cada vez mayores.

Las tablas de mortalidad por contemporáneos con que se calcularon las esperanzas de vida anteriores tienen únicamente un propósito ilustrativo. En los cálculos actuariales se recomienda usar series de probabilidades de muerte y tablas de vida por generación o cohorte. El gráfico 3 muestra la serie por edad de probabilidades de muerte de la cohorte de personas nacidas en 1952. Conviene notar que cada probabilidad en este caso corresponde a una época diferente, así la probabilidad de morir a los 70 años es la proyectada para 2022 y la de morir a los 80 es la de 2032.

*Gráfico 3. Probabilidades de muerte proyectadas para la cohorte de nacidos en 1952 y observadas en 2005-2010, por sexo*



El gráfico 3 también presenta las probabilidades de morir observadas en 2005-2010 (líneas punteadas). La comparación hasta cierto punto sorprende porque no muestra grandes cambios en el futuro. El cambio mayor proyectado es alrededor de la edad 80 años, cuando se proyecta una caída de la mortalidad de 15% en los hombres y de 20% en las mujeres.

En la mayor parte de edades la caída proyectada es de menos de 10% en hombres y menos de 13% en mujeres. Como indicador resumen, el pronóstico de la esperanza de vida a la edad 60 años es poco más de un año mayor para para esta cohorte en comparación con la tabla de contemporáneos de 2005-2010 (cuadro 1).

Las series de probabilidades de muerte por generación proyectadas hasta el año 2150 (y con fines informativos las esperanzas de vida) están disponible en la página web de la SUPEN [URL provisional: <http://pruebas1.ineldat.com/>]. Los usuarios también pueden obtener en esta página Web de manera interactiva la serie de probabilidades  $q_x$  para una cohorte específica de interés.

*Cuadro 1. Indicadores seleccionados de las tablas de vida de 2005-2010 y de la cohorte de nacidos en 1952.*

Tabla de vida	$e_{60}$ hombres	$e_{60}$ mujeres	$q_{80}$ hombres	$q_{80}$ mujeres
Periodo 2005-2010	22,1	24,9	0,058	0,043
Cohorte nacidos 1952	23,3	26,4	0,049	0,034

## Bibliografía

- Aguilar Fernández, E. (2012). *Parametrización de la mortalidad de Costa Rica en los Siglos XX y XXI*. Tesis para optar por el grado de Maestría Académica en Estadística. Sistema de Estudios de Postgrados. Universidad de Costa Rica. San José
- Facultad e Instituto de Actuarios (2002). *Formulae and Tables for Examinations of The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries*. The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries. Inglaterra.
- Giroi, F & King, G. (2008). *Demographic Forecasting*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- INEC & CCP (2002). *Estimaciones y Proyecciones de Población Costa Rica 1970-2050 Actualizadas al 2000*. San José, Costa Rica: Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) y Centro Centroamericano de Población (CCP).
- Lee, R. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1), 80-94.
- Lee, R. & Carter, L. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87, 419, 659-675.
- Ortega, A. (1987). Tablas de mortalidad. San José, CR: Centro Latinoamericano de Demografía CELADE.
- United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2011). *World Population Prospects: The 2010 Revision*. ST/ESA/SER.A/317. Datos disponibles en línea en: <http://esa.un.org/unpd/wpp/Excel-Data/mortality.htm>

Anexo 1. Parámetro  $b_x$  del modelo Lee-Carter para Costa Rica 1950-2010

Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres	Edad	Hombres	Mujeres
0	0.030835	0.020581	45	0.007877	0.009839	90	0.002961	0.001925
1	0.045905	0.031654	46	0.007871	0.009384	91	0.002717	0.001763
2	0.041745	0.031177	47	0.007873	0.009041	92	0.002473	0.001602
3	0.038030	0.027615	48	0.007814	0.008762	93	0.002229	0.001440
4	0.037138	0.026821	49	0.007769	0.008516	94	0.001985	0.001279
5	0.036056	0.024951	50	0.007851	0.008456	95	0.001742	0.001117
6	0.033242	0.022740	51	0.007902	0.008568	96	0.001498	0.000956
7	0.030629	0.020734	52	0.007839	0.008748	97	0.001254	0.000795
8	0.028338	0.018941	53	0.007800	0.008817	98	0.001010	0.000633
9	0.026050	0.017408	54	0.007746	0.008662	99	0.000766	0.000472
10	0.023655	0.015973	55	0.007700	0.008474	100	0.000522	0.000310
11	0.021300	0.014575	56	0.007672	0.008353	101	0.000278	0.000149
12	0.019056	0.013342	57	0.007701	0.008279	102	0.000034	-0.000013
13	0.016785	0.012459	58	0.007756	0.008243	103	-0.000210	-0.000174
14	0.014463	0.011883	59	0.007745	0.008225	104	-0.000454	-0.000336
15	0.012467	0.011541	60	0.007678	0.008194	105	-0.000697	-0.000497
16	0.011047	0.011515	61	0.007617	0.008102	106	-0.000941	-0.000658
17	0.010117	0.011899	62	0.007531	0.007958	107	-0.001185	-0.000820
18	0.009410	0.012496	63	0.007390	0.007805	108	-0.001429	-0.000981
19	0.008904	0.013021	64	0.007199	0.007659	109	-0.001673	-0.001143
20	0.008643	0.013405	65	0.007026	0.007506	110	-0.001917	-0.001304
21	0.008645	0.013765	66	0.006891	0.007340	111	-0.002161	-0.001466
22	0.008653	0.014141	67	0.006770	0.007210	112	-0.002405	-0.001627
23	0.008486	0.014522	68	0.006674	0.007120	113	-0.002648	-0.001789
24	0.008216	0.014752	69	0.006604	0.006988	114	-0.002892	-0.001950
25	0.008159	0.014765	70	0.006501	0.006805			
26	0.008219	0.014662	71	0.006361	0.006598			
27	0.008322	0.014570	72	0.006177	0.006376			
28	0.008271	0.014184	73	0.005963	0.006106			
29	0.008339	0.013723	74	0.005748	0.005796			
30	0.008509	0.013319	75	0.005525	0.005480			
31	0.008577	0.013146	76	0.005330	0.005177			
32	0.008591	0.013234	77	0.005189	0.004874			
33	0.008661	0.013458	78	0.005084	0.004586			
34	0.008789	0.013664	79	0.004965	0.004306			
35	0.009098	0.013946	80	0.004809	0.004009			
36	0.009479	0.014129	81	0.004633	0.003694			
37	0.009869	0.014319	82	0.004475	0.003407			
38	0.009950	0.014178	83	0.004314	0.003157			
39	0.009697	0.013604	84	0.004140	0.002932			
40	0.009336	0.012864	85	0.003970	0.002731			
41	0.008982	0.012186	86	0.003817	0.002559			
42	0.008644	0.011580	87	0.003647	0.002401			
43	0.008288	0.010970	88	0.003440	0.002246			
44	0.007958	0.010336	89	0.003205	0.002086			

Anexo 2. Parámetro  $k_t$  del modelo Lee-Carter para Costa Rica 1950-2010

Año	Hombres		Mujeres	
	$k_t$	S. E.	$k_t$	S. E.
1950	42.10400		63.86555	
1955	34.37597		53.66793	
1960	31.55525		48.41098	
1965	27.59007		43.08406	
1970	18.45262		27.29243	
1975	-0.89409		-3.66605	
1980	-13.97571		-21.68747	
1985	-19.57014		-29.70429	
1990	-23.35104		-34.52751	
1995	-25.11493		-39.71899	
2000	-33.44614		-49.41299	
2005	-37.72586		-57.60363	
2010	-44.83939	4.91615	-68.73589	7.56105
2015	-52.10874	6.87497	-79.82586	10.60825
2020	-59.45747	8.55692	-91.10328	12.95281
2025	-66.73028	9.86707	-102.34460	15.05648
2030	-74.03942	10.98083	-113.27410	16.96791
2035	-81.35461	12.19162	-124.27840	18.46880
2040	-88.84024	13.10937	-135.52050	19.76539
2045	-96.30177	13.97725	-146.43540	21.25745
2050	-103.56970	14.95508	-157.15690	22.69608
2055	-110.80350	15.73384	-168.01990	24.08459
2060	-118.12930	16.52587	-179.31570	24.77217
2065	-125.16100	17.38985	-190.55120	26.11670
2070	-132.35470	18.17872	-201.47870	26.86696
2075	-139.52460	18.92533	-212.49610	27.72928
2080	-146.59350	19.47686	-223.19280	28.19461
2085	-153.66760	20.14163	-234.03980	29.10300
2090	-160.99530	20.89778	-245.30600	30.08148
2095	-168.38320	21.35352	-256.12470	31.33698
2100	-175.33280	22.03556	-267.42030	31.98902
2105	-182.41810	22.43568	-278.53340	32.91936
2110	-189.53530	22.93385	-289.15590	33.84773
2115	-196.60390	23.28065	-300.05150	34.41636
2120	-203.74010	23.84643	-310.68200	35.36093
2125	-210.82540	24.14002	-321.48480	36.08665
2130	-218.02040	24.58430	-332.59790	36.95022
2135	-225.16920	25.00700	-343.55940	37.68980
2140	-232.26730	25.51676	-354.28600	38.88377
2145	-239.56230	25.78818	-365.42810	40.02251
2150	-246.80020	26.15585	-376.16400	40.89992

E. S. = Error estándar del valor proyectado